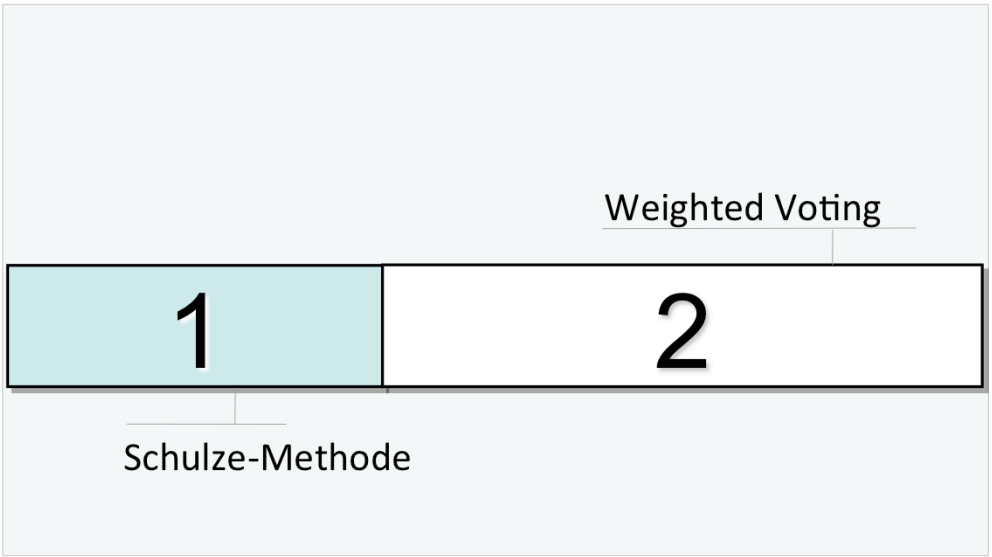
Soziale Entscheidungen: Wahlen

Was haben Wikimedia, Debian-Linux, MTV und die Piratenpartei gemeinsam?

Sie verwenden die Schulze-Methode

Agenda



Das Condorcet-Prinzip verallgemeinert die KO-Wahl

[Condorcet 1785]

Condorcet-Gewinner: Alternative, die alle paarweisen Vergleiche gewinnt

- eindeutig, wenn vorhanden
- häufig nicht existent (Condorcet-Paradox)
  - →Universalitätskritierium verletzt

Condorcet-Prinzip: Mechanismus wählt Condorcet-Gewinner, falls existent

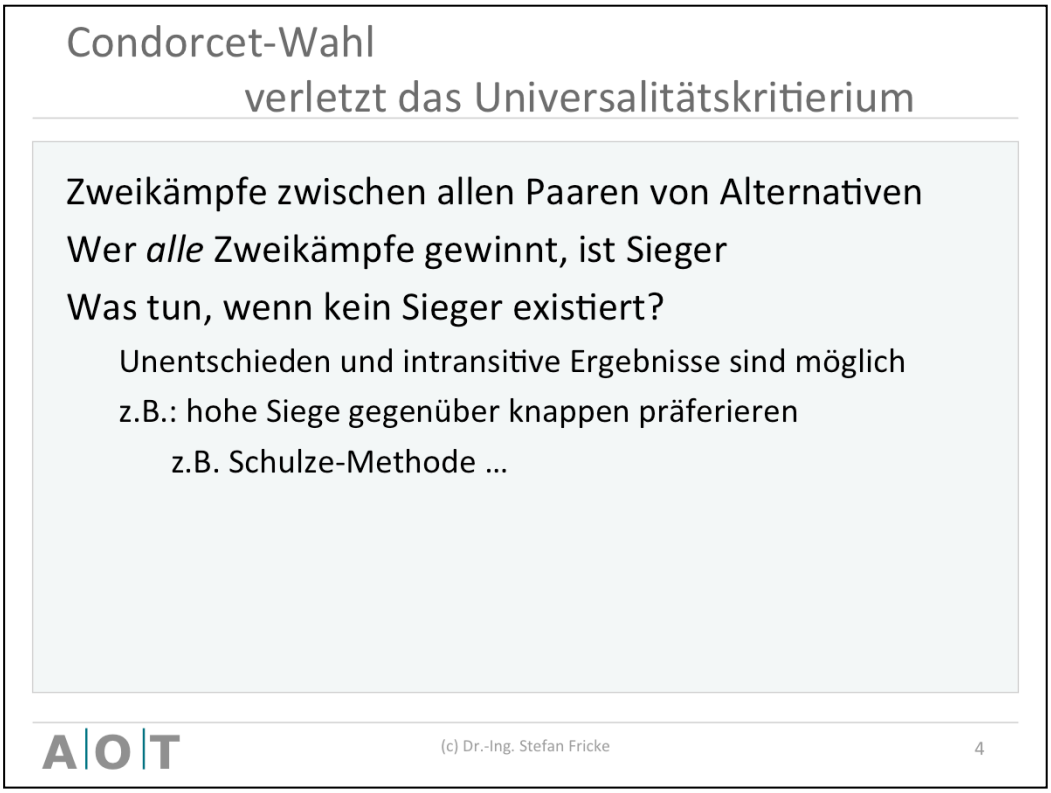
49 %	Bush	Gore	Nader
20 %	Gore	Nader	Bush
20 %	Gore	Bush	Nader
11 %	Nader	Gore	Bush

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 3

Condorcet-Prinzip: Ein Kandidat, der jeden Zweikampf gegen jeden anderen Kandidaten gewinnt, sollte auch der Wahlgewinner sein. Dies entspricht sowohl einem Gleichgewicht als auch dem Paretooptimum, denn gegen jeden anderen Gewinner würde sich eine Mehrheit der Wähler aussprechen.

M. le Marquis de Condorcet. *Essai sur l'application de l'analyse `a la probabilt´e des d´ecisions rendues a la pluralit´e des voix*. Paris, 1785

Condorcet-Wahl: Gore gewinnt alle Zweikämpfe



Erfinder ist der Marquis de Condorcet (um 1790). Jede Alternative tritt einen „Zweikampf“ gegen jede andere Alternative an (bei n Alternativen also n! Zweikämpfe). Wie beim Binärvoting entscheidet bei einem Zweikampf die Zahl der besseren Platzierungen. Wenn eine Alternative alle Zweikämpfe gewinnt, steht ein klarer Sieger fest – alle Kandidaten würden den Ausgang als fair betrachten. Was aber, wenn kein eindeutiger Sieger festgestellt werden kann?

In den meisten (realistischen) Profilen wird kein eindeutiger Condorcet-Sieger ermittelt werden können. Es kann sein, dass eine Alternative 95% der Zweikämpfe gewinnt und damit besser abschneidet als alle anderen Alternativen. Es kann aber ebenso gut die Situation eintreten, dass mehrere Alternativen gleich viele Siege davon tragen. An diesem Szenario wird deutlich, dass Condorcet-Mechanismus das Universalitätskritierium („jede Abstimmung liefert ein eindeutiges Ergebnis“) verletzt. Weitere (möglicherweise unerwünschte) Eigenschaften des Condorcet-Mechanismus: Das Ergebnis kann intransitiv sein (es kann Zyklen enthalten, z.B. A >*B >*C >* A) und der Codorcet-Sieger kann möglicherweise von keinem Wähler auf den ersten Platz gesetzt worden sein. „Gute“ Eigenschaften sind z.B. wenn >50% der Wähler eine Alternative auf den ersten Platz setzen, dann gewinnt diese Alternative auch die Wahl.

Was also tun, wenn kein Sieger ermittelt werden kann? Es gibt eine Reihe von Verfeinerungen der Methode. Die Änderungen beruhen zumeist darauf, Unentschieden und Intransitivitäten dadurch aufzulösen, indem man hohe Siege gegenüber knappen Siegen präferiert.

Die – laut Wikipedia – prominenteste ist die Schulze-Methode (http://de.wikipedia.org/wiki/Schulze-Methode). Sie erfüllt unter Anderem das Universalitätskriterium.

Markus Schulze: A New Monotonic and Clone-Independent Single-Winner Election Method, VOTING MATTERS, Issue 17, S. 9-19, October 2003. Online: http://www.citizensassembly.bc.ca/resources/submissions/csharman-10_0409201706-143.pdf. Übrigends: Markus Schulze ist ein Absolvent der TU Berlin.

Die Höhe der Condorcet-Siege spielt bei der Schulze-Methode eine Rolle

#	≻
5	ACBED
5	ADECB
8	BEDAC
3	CABED
7	CAEBD
2	CBADE
7	DCEBA
8	EBADC

d[x,y] : Zahl der Wähler, die x vor y strikt präferieren.

	d[;A]	d[;B]	d[;C]	d[;D]	d[;E]
d[A;]		20	26	30	22
d[B;]	25		16	33	18
d[C;]	19	29		17	24
d[D;]	15	12	28		14
d[E;]	23	27	21	31	

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 5

Der – laut Wikipedia – prominenteste Condorcet-Wahlmechanismus ist die Schulze-Methode (http://de.wikipedia.org/wiki/Schulze-Methode). Sie erfüllt (unter Anderem) das Universalitätskriterium. Nach [Schulze 2010] wird seine Methode u.A. vom Debian-Linux Projektteam (>100 Mitglieder / Wähler), von MTV zur Auswahl der gezeigten Musikvideos, von der Wikimedia-Foundation (>25000 Mitglieder) und der Piratenpartei verwendet. Übrigens: Markus Schulze ist ein Absolvent der TU Berlin.

Beispiel aus http://de.wikipedia.org/wiki/Schulze-Methode

45 Wähler stimmen über 5 Kandidaten ab. Im Beispiel liegen vollständige Präferenzrelationen ohne Indifferenz vor. Die Anpassung auf die „vollständige“ Präferenzsprache mit Indifferenz und Nichtnennung ist leicht möglich, man muss nur das Gleichheitszeichen in der Präferenzrelation einführen. . Gleich gewichtete Alternativen zählen in der Differenzrechnung d[x,y] natürlich nicht mit.

Die Tabelle zeigt: A gewinnt gegen {C,D} und verliert gegen {B,E}; B gewinnt gegen {A,D} und verliert gegen {C,E}; … E verliert (nur) gegen C. Diese Situation ergibt also keinen Condorcet-Gewinner.

Hinsichtlich der Zahl der Siege würde E (gewinnt gegen alle außer (knapp) gegen C) einen möglichen Wahlsieger ergeben. Man könnte auch die Differenzen aufsummieren (E hätte 1+9-3+17=24; A hätte -5+7+15-1=16; usw) oder einen Borda-Count einführen.

Ketten bezeichnen Siegerpfade

	d[;A]	d[;B]	d[;C]	d[;D]	d[;E]
d[A;]		20	26	30	22
d[B;]	25		16	33	18
d[C;]	19	29		17	24
d[D;]	15	12	28		14
d[E;]	23	27	21	31	

$K_1, \ldots, K_n$ ist Pfad von K_1 nach K_n

z.B. **A-(26)-C-(29)-B**

Eine Kette ist ein Pfad mit der Eigenschaft:

$\forall i \; d[K_i,K_{i+1}] > d[K_{i+1},K_i]$.

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 6

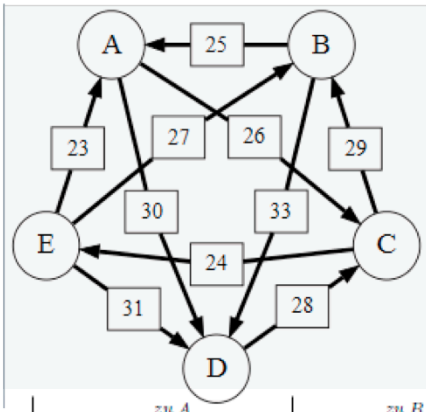
Kandidat A wird C 26 Mal vorgezogen, C wird gegenüber B 29 mal präferiert.

A-(26)-C-(29)-B bezeichnet einen Pfad von A nach B. Allgemein ist ein Pfad von X nach Y eine geordnete Menge von Kandidaten

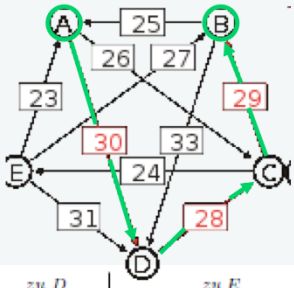
K1, …, Kn, wobei gilt: K1=X und Kn=Y.

Gesucht sind Ketten, welche zusätzlich die Eigenschaft besitzen, dass, wenn Ki,Ki+1 benachbart sind, gelten muss: d[Ki,Ki+1] > d[Ki+1,Ki].

Gesucht sind stärkste Ketten zwischen allen Paaren von Alternativen



Stärke einer Kette $K_1, \ldots, K_n$:
$\min \{ d[K_i;K_{i+1}] \}$



	... zu A	... zu B	... zu C	... zu D	... zu E
A		A-(30)-D-(28)-C-(29)-B	A-(30)-D-(28)-C	A-(30)-D	A-(30)-D-(28)-C-(24)-E
B	B-(25)-A		B-(33)-D-(28)-C	B-(33)-D	B-(33)-D-(28)-C-(24)-E
C	C-(29)-B-(25)-A	C-(29)-B		C-(29)-B-(33)-D	C-(24)-E
D	D-(28)-C-(29)-B-(25)-A	D-(28)-C-(29)-B	D-(28)-C		D-(28)-C-(24)-E
E	E-(31)-D-(28)-C-(29)-B-(25)-A	E-(31)-D-(28)-C-(29)-B	E-(31)-D-(28)-C	E-(31)-D	

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 7

Der Graph repräsentiert die direkten Ketten zwischen jeweils 2 Kandidaten. Er ist direkt aus der vorherigen Tabelle abgeleitet. Z.B. d[A,B]=20 < d[B,A]=25. Also verläuft die „direkte Kette“ von B nach A. Der jeweilige Differenzwert steht an den Pfeilen.

Die Stärke einer Kette ist das Minimum der in der Kette enthaltenen Differenzen. Gesucht ist jeweils die stärkste Kette zwischen allen Knotenpaaren. Um die stärkste Kette zwischen 2 Alternativen zu ermitteln müssen alle Ketten zwischen diesen Alternativen untersucht werden.

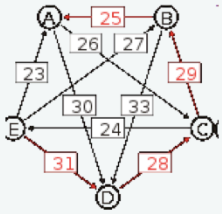
Beispiel: Von A nach B führen 3 Ketten: A-26-C-29-B, A-30-D-28-C-29-B, A-26-C-24-E-27-B. (Andere, welche Zyklen enthalten, z.B. ACEDCB, müssen nicht untersucht werden, sie können ja nur schlechter sein). Von diesen Ketten ist A-30-D-28-C-29-B die stärkste mit einem Wert von 28.

In der unten stehenden Tabelle sind die Stärken der jeweiligen stärksten Kette rot unterstrichen.

Es existiert immer ein potentieller Sieger
Schulze-Ranking: E > A > C > B > D

p [X, Y] : Stärke der stärksten Kette von X nach Y
X ist besser als Y ⇔ p[X,Y] > p[Y,X]

	p[;A]	p[;B]	p[;C]	p[;D]	p[;E]
p[A;]		28	28	30	24
p[B;]	25		28	33	24
p[C;]	25	29		29	24
p[D;]	25	28	28		24
p[E;]	25	28	28	31	



X ist *potentieller Sieger*, ⇔ ∀X≠Y p[X,Y] ≥ p[Y,X]

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 8

Die Tabelle listet die Stärken der stärksten Ketten zwischen allen Knotenpaaren auf (vergleiche vorherige Folie). Um festzustellen, ob A besser oder schlechter ist als B vergleicht man die betreffenden Zahlen in der Tabelle (p[B;A] und p[A;B]).

Derjenige Kandidat, der gegenüber allen anderen Kandidaten eine stärkere stärkste Kette besitzt, gewinnt die Wahl.

Von der Wikipedia-Seite:

Wegen 25 = p[E,A] > p[A,E] = 24 ist Kandidat E *besser* als Kandidat A.

Wegen 28 = p[E,B] > p[B,E] = 24 ist Kandidat E *besser* als Kandidat B.

Wegen 28 = p[E,C] > p[C,E] = 24 ist Kandidat E *besser* als Kandidat C.

Wegen 31 = p[E,D] > p[D,E] = 24 ist Kandidat E *besser* als Kandidat D.

Wegen 28 = p[A,B] > p[B,A] = 25 ist Kandidat A *besser* als Kandidat B.

Wegen 28 = p[A,C] > p[C,A] = 25 ist Kandidat A *besser* als Kandidat C.

Wegen 30 = p[A,D] > p[D,A] = 25 ist Kandidat A *besser* als Kandidat D.

Wegen 29 = p[C,B] > p[B,C] = 28 ist Kandidat C *besser* als Kandidat B.

Wegen 29 = p[C,D] > p[D,C] = 28 ist Kandidat C *besser* als Kandidat D.

Wegen 33 = p[B,D] > p[D,B] = 28 ist Kandidat B *besser* als Kandidat D.

Das Schulze-Ranking ist somit E > A > C > B > D.

Es lässt sich zeigen, dass es stets mindestens einen potentiellen Sieger gibt. Es ist auch ein Unentschieden möglich, hier schlägt die Schulze-Methode einen Tie-Break-Auflöser vor (in [Schulze 2003, 2010] erklärt).

Schulze-Methode hat polynomialen Aufwand

Implementierung mit Floyd-Warshall-Algorithmus

- $O(n^3)$

Schulze erfüllt:

- Concorcet-Kriterium, Paretoeffizienz, Universalität, Diktatorfreiheit, Monotonie

Nachteile:

- keine Transitivität, Abhängigkeit von irrelevanten Alternativen, strategisches Wählen oder Nichtwahl kann sinnvoll sein

Beispiel für nicht transitive Präferenzordnung

A>{B,C,D,E},
B>{D,E},
C>B,
D>{C,E},
E>C

nicht transitiv, denn:
C>B>E>C
C>B>D>C
C>B>D>E>C

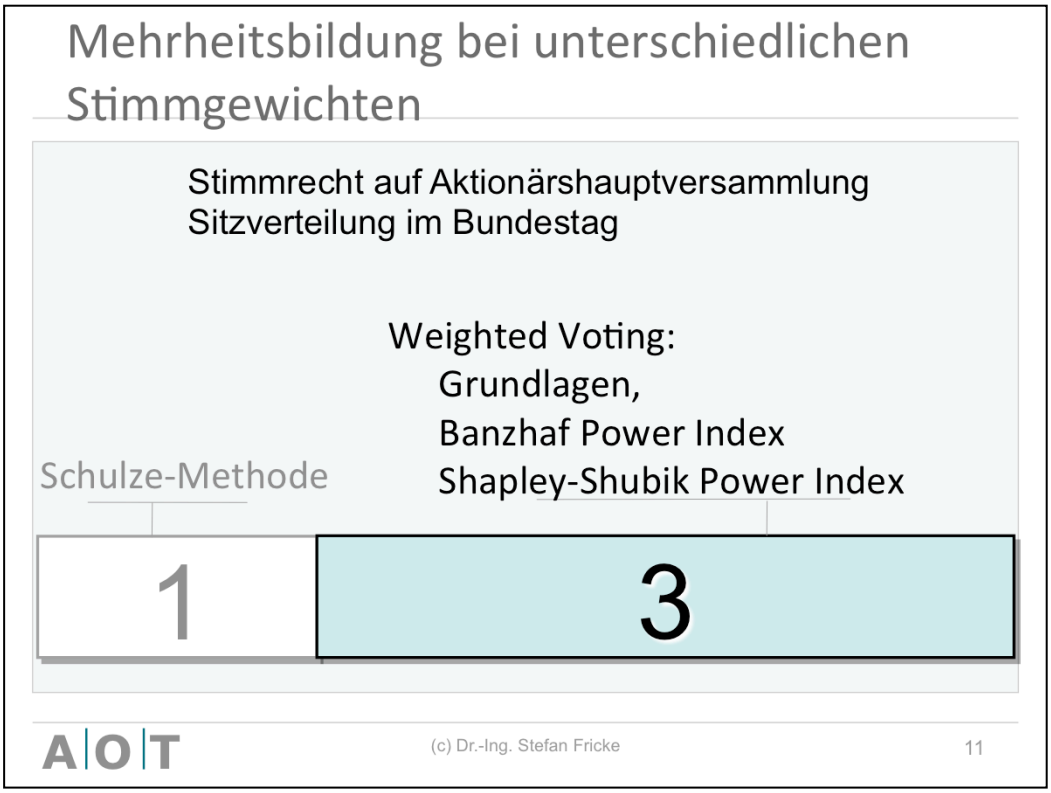
	p[;A]	p[;B]	p[;C]	p[;D]	p[;E]
p[A;]		11	11	15	15
p[B;]	5		11	21	17
p[C;]	5	13		5	5
p[D;]	5	11	11		17
p[E;]	5	9	9	9	

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 10

Ähnlich wie vorheriges Beispiel, jedoch mit 2 Änderungen in der Tabelle: p[C;D]=p[C;E]=5 (statt zuvor 13).

Nun gewinnt jede Alternative mindestens einen Schulze-Zweikampf.

A ist immer noch eindeutiger Sieger, aber der mögliche nichttransitive Zyklus C>B>D>E>C lässt alle möglichen Kombinationen hinsichtlich möglicher Reihenfolgen der restlichen Kandidaten zu.



Aktiengesellschaft: Kontrolle von Stimmen auf Hauptversammlung

Koalitionen in der Politik: Sitzverteilung im Bundestag

Erfolgreiche Wählergemeinschaften auf Basis von Gewichten und Quorum bestimmen

5 Spieler, 41 Stimmen, einfache Mehrheit:

[21 : 25, 10, 3, 2, 1]

Quorum

Spieler 1, ..., n, aufsteigend nach Gewichten sortiert

Sei W die Zahl der Stimmen, dann muss gelten:

$W \geq \text{Quorum} > \frac{1}{2}W$

Gewinnerkoalition: Menge S von Spielern $W(S) \geq \text{Quorum}$

$\{ \{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{P_1, P_2, P_3\}, \ldots \{P1\} \}$

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 12

Spieler = Wähler, Gewicht = Anzahl der Stimmen eines Spielers, Quorum = notwendige Stimmzahl für Wahlerfolg.

das Quorum muss sinnvollerweise mehr als die Hälfte der Stimmen betragen (ansonsten kämen mehrere Mehrheiten gleichzeitig infrage) und nicht mehr als das Gesamtgewicht betragen (sonst gäbe es keine Mehrheit). Beispielsweise bei [10:5,2,3] könnte es zur Situation kommen, dass Spieler 1 gegen eine Koalition von 2 und 3 antritt – und beide würden als Sieger dastehen.

Koalitionen sind auch Gegenstand einer späteren VL (dort geht es um Maximierung der sozialen Wohlfahrt, Koalitionen erwirtschaften einen gewissen Nutzen). Hier geht es ausschließlich um die Feststellung, ob eine Wählergemeinschaft genügend Gewicht besitzt, um das Quorum zumindest zu erreichen.

Eine Verliererkoalition ist eine Wählergemeinschaft, die das Quorum nicht erreicht.

$2^n - 1$ Koalitionen existieren bei n Wählern.

Macht und Ohnmacht bei Wahlen

Diktator: wenn $w_1 \geq$ Quorum [11: 12, 5, 4]

Veto-Spieler: wenn $W\text{-}w_1 \geq$ Quorum [11: 6, 3, 2]

Dummy-Spieler: hat keinen Einfluss auf Wahlausgang

[30: 10, 10, 10, 9]

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 13

Ein Diktator kann alleine entscheiden. Er kann natürlich zusammen mit anderen abstimmen (koalieren), aber die anderen können nicht ohne den Diktator ein Programm umsetzen. Ein Diktator ist in jeder Gewinnerkoalition enthalten.

Ein Veto-Spieler ist mächtig genug, um einen Wahlausgang zu verhindern. D.h., er ist Mitglied einer jeden Gewinnerkoalition.

Ein Dummy-Spieler hat keinen Einfluss auf den Ausgang einer Wahl. D.h., er kann aus jeder Gewinnerkoalition entfernt werden, ohne dass das Quorum unterschritten würde.

Übung

Repräsentieren Sie den UN-Sicherheitsrat als Weighted Voting Game

- 5 ständige Mitglieder (CH, FR, GB, RU, USA)
- 10 nicht ständige Mitglieder
- 1 Generalsekretär der UN ohne Stimmrecht
- Ein Beschluss benötigt 9 Stimmen, darunter alle ständigen Mitglieder

Übung: Lösung

15 Spieler, davon 5 starke und 10 schwache

Quorum: 5x + 4

5x + 4 > 4x + 10 ⇔ x > 6

z.B. x = 7, Quorum: 39

[39 : 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

geht auch:
[59 : 11, 11, 11, 11, 11, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Die ersten 5 Spieler sind Vetospieler mit gleichem Gewicht; die anderen 10 Spieler haben ebenfalls gleiches Gewicht.

Der Generalsekretär muss nicht mit modelliert werden, da er kein Wähler ist.

Eine Gewinnerkoalition enthält also die 5 starken Spieler und mindestens 4 schwache.

Jedes nicht ständige Mitglied hat 1 Stimme. Summe=10

Welches Gewicht hat ein ständiges Mitglied und wie hoch ist das Quorum?

Macht hängt von der Gewichtsverteilung ab

a) [2: 1, 1, 1]
b) [3: 1, 1, 1]

gleiches Gewicht, gleiche Macht

c) [10: 9, 8, 2]

ungleiches Gewicht, gleiche Macht

Gewinnerkoalitionen:
{ (P_1,P_2,P_3), (P_1,P_2), (P_1,P_3), (P_2,P_3) }

a) P_1, P_2, P_3
$\underline{P_1}$, $\underline{P_2}$
$\underline{P_1}$, $\underline{P_3}$
$\underline{P_2}$, $\underline{P_3}$

b) $\underline{P_1}$, $\underline{P_2}$, $\underline{P_3}$

P_i ist kritischer Spieler in Gewinnerkoalition G, wenn $W(G) - w_i < Quorum$

c) wie a)

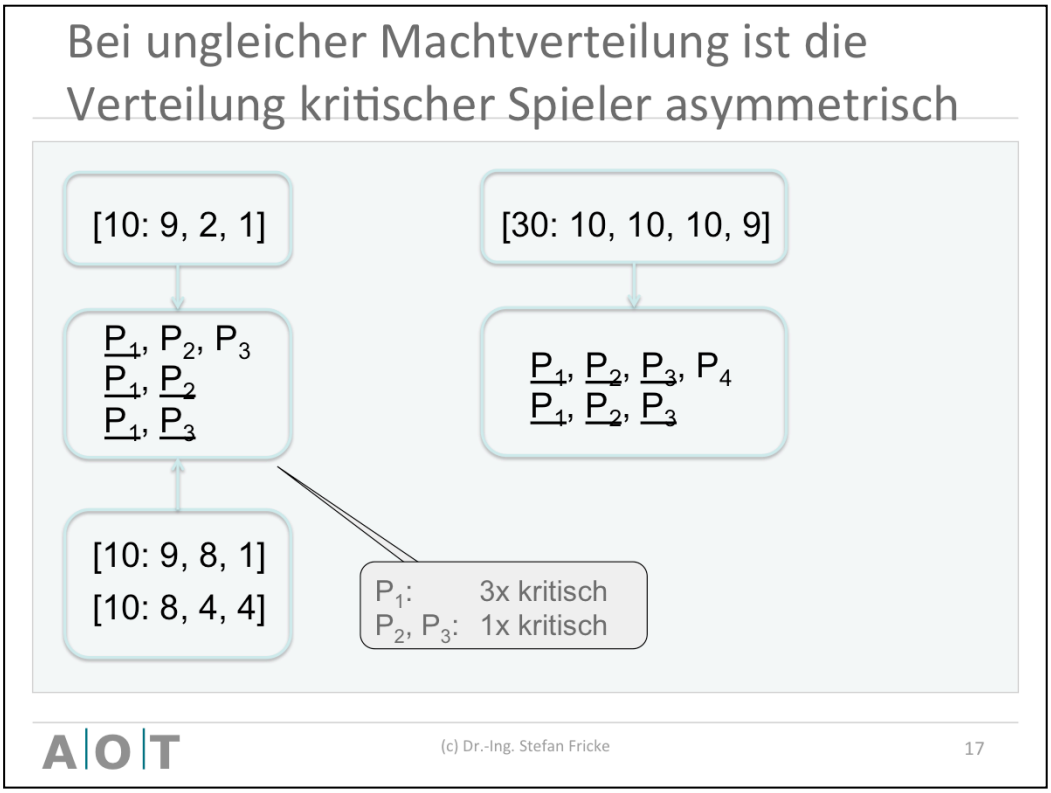
A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 16

Ein kritischer Spieler würde eine Gewinnerkoalition durch sein Verlassen zu einer Verliererkoalition machen.

Haben alle Spieler das gleiche Gewicht (z.B. [2: 1, 1, 1]), dann hat das Quorum keinen Einfluss auf die Machtverteilung

Bei [10: 9, 8, 2] macht eine Aufstellung aller möglichen Gewinnerkoalitionen deutlich: jeder Spieler besitzt die gleiche Macht.

Begriff “Gewinnerkoalition”: Eine beliebige Menge von Spielern, deren Gewichtsumme mindestens dem Quorum entspricht.



Diktator und Veto-spieler sind immer kritische Spieler; ein Dummy-Spieler ist niemals kritischer Spieler.

Eine Analyse der kritischen Spieler eines „weighted voting games“ wird im Banzhaf Power Index zusammengefasst ...

Banzhaf Power Index (BPI) zählt kritische Spieler in Gewinnerkoalitionen

In jeder Gewinnerkoalition:
ermittle kritische Spieler

Für jeden Spieler i:
ermittle BP_i

Ermittle Banzhaf Power

$$BP^* = \sum_{i=1}^{n} BP_i$$

Für jeden Spieler i:

$$BPI_i = \frac{BP_i}{PB^*}$$

i	BP_i
1	5
2	3
3	3
4	1

[18: 12, 7, 6, 5]

P_1, P_2
P_1, P_3
P_1, P_2, P_3
P_1, P_2, P_4
P_1, P_3, P_4
P_2, P_3, P_4
P_1, P_2, P_3, P_4

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 18

Banzhaf Power Index (BPI). i ist kritischer Spieler in Koalition S, wenn: $w(S) - wi < q \leq w(S) + wi$

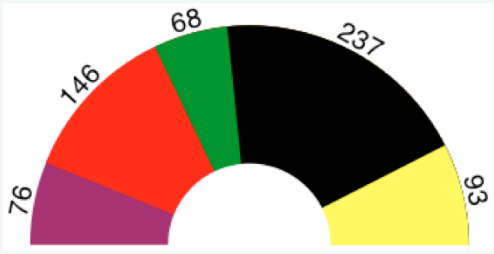
Je häufiger ein Spieler in Gewinnerkoalitionen als kritischer Spieler auftaucht, desto höher ist sein BPI. Der BPI ist normiert und gibt das prozentuale Machtgewicht eines Spielers an (die Summe aller BPI ist 1).

Im Beispiel ist in der Dreierkoalition {P1, P2, P3} P1 der einzige kritische Spieler. Denn diese Koalition „enthält" ja 2 mehrheitsfähige 2er-Koalitionen (in denen jeweils P1 enthalten ist – diese Koalitionen stehen in den beiden ersten Zeilen in der Box). Auf der anderen Seite sind in der Dreierkoalition {P1, P2, P4} zwei Spieler kritisch, denn das Ausscheiden von P1 oder P2 würde keine Gewinnerkoalition mehr ergeben. Schließlich existiert eine Dreierkoalition der Schwächsten {P2, P3, P4}, in denen jeder Spieler kritisch ist. Die große Koalition enthält keinen kritischen Spieler.

Mit einer Banzhaf-Power von 5 ist Spieler 1 am stärksten. Die BP* des gesamten Spiels ist die Summe der BPi = 12 (unten in der Tabelle dargestellt). Somit ergeben sich BPI von (5/12, 3/12, 3/12, 1/12) für die Spieler 1, ..., 4.

Übung: BPI im 17. Deutschen Bundestag

620 Sitze



A|O|T

(c) Dr.-Ing. Stefan Fricke

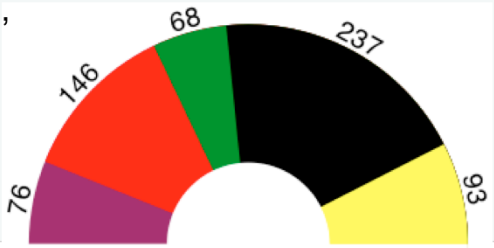
(einfachere Übungen in 1115L07.pdf)

620 Sitze, davon CDU/CSU: 237, SPD: 146, FDP: 93, Die Linke: 76, Grüne: 68.

Übung: BPI im 17. Deutschen Bundestag

[311: 237, 146, 93, 76, 68]

(1,2), (1,3), (1,4),
(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5),
(2,3,4),
(1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,2,4,5), (1,3,4,5),
(2,3,4,5),
(1,2,3,4,5),



i	BP_i	BPI_i
1	13	13/32
2	9	9/32
3	6	6/32
4	4	4/32
5	0	0
∑	32	1

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 20

Gewinnerkoalitionen (unterstrichen sind die kritischen Spieler):

(1,2), (1,3), (1,4),

(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5),

(2,3,4),

(1,2,3,4), (1,2,3,5), (1,2,4,5), (1,3,4,5),

(2,3,4,5),

(1,2,3,4,5),

Die Entwicklung von kleinst möglichen Koalitionen (Zeile 1) und nachfolgend die Erweiterung um jeweils einen Spieler (der als zusätzlicher Stimmengeber für die erweiterte Koalition natürlich ein Dummy ist) (Zeilen 2,4), sowie neue Koalitionen ohne den jeweils mächtigsten (Zeilen 3, 5) und die große Koalition, in der kein kritischer Spieler existiert.

BPI im UN-Sicherheitsrat

[39 : 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

2^{10} Koalitionen, Permutationen uninteressant. $\frac{n!}{(n-k)!}$

Kombinationen der nichtständigen Mitglieder:

$${}_{10}C_4 + {}_{10}C_5 + {}_{10}C_6 + {}_{10}C_7 + {}_{10}C_8 + {}_{10}C_9 + {}_{10}C_{10} =$$

$$= 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 848$$

P_s : 848 mal kritisch

P_n : 210 x 4 / 10 = 84 mal kritisch

BP : 5 x 848 + 10 x 84 = 5080

i	BP_i	BPI_i	%
s	848	848/5080	16.69
n	84	84/5080	1.65

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 21

http://www.milefoot.com/math/discrete/socialchoice/securitycouncilpower.htm

Sei Ps ein Spieler vom Typ ständiges Mitglied; Pn vom Typ nichtständiges Mitglied. (Die Spieler sind nicht unterscheidbar)

In jeder der 848 Gewinnerkoalitionen sind alle 5 ständigen Mitglieder enthalten. Daher: Ps ist 848 mal kritisch.

Die nichtständigen Mitglieder sind nur in denjenigen Gewinnerkoalitionen kritisch, die exakt das Quorum von 39 erreichen. Das sind 210. Darin ist jeder der 4 Pn kritsch (also x4). Aufgrund der Ununterscheidbarkeit (alle Ps sind identisch hinsichtlich ihrer Kraft) muss noch durch 10 geteilt werden.

Reform des UN-Sicherheitsrats?

[39 : 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

i	BP_i	BPI_i	%
s	848	848/5080	16.69
n	84	84/5080	1.65

Was geschieht bei:

a) mehr nichtständigen Mitgliedern?
b) weniger nichtständigen Mitgliedern?
c) Erhöhung des Quorums
d) Verringerung der ständigen Mitglieder

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 22

Simulator: http://demonstrations.wolfram.com/PowerVotingSystemsLikeTheUnitedNationsSecurityCouncil/

a) |Pn| = 11 => [44: 8, 8, 8, 8, 8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]. Einfluss der nichtständigen Mitglieder nimmt ab.

b) der umgekehrte Effekt zu a): beispielsweise bei [13: 2,2,2,2,2,1,1,1,1] (Quorum: 8) ist der BPIs=0,135 und der BPIn=0,0811. Bei nur einem ständigen Mitglied (Quorum=6) ist der Einfluss aller Wähler gleich groß.

c) Einfluss der Pn nimmt zu. Z.B. bei Quorum=13 ([23:3,3,3,3,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1] ist BPIs=8,76%; BPIn=5,63%. Bei einem Quorum von 15 (Einstimmigkeit) ist der BPI gleich groß.

d) Die Verkleinerung von |Ps| führt zu größerem BPIn.

Shapley-Shubik Power Index zählt ausschlaggebende Spieler

ausschlaggebend (pivotal): Spieler, der Verliererkoalition durch seinen Beitritt zu Gewinnerkoalition macht

Jede sequenzielle Gewinnerkoalition $\langle P_1, ..., P_k \rangle$ hat einen ausschlaggebenden Spieler

[10: 6, 5, 4

$\langle P_1, \underline{P_2}, P_3 \rangle$
$\langle P_1, \underline{P_3}, P_2 \rangle$
$\langle P_2, \underline{P_1}, P_3 \rangle$
$\langle P_2, \underline{P_1}, P_3 \rangle$
$\langle P_3, \underline{P_1}, P_2 \rangle$
$\langle P_3, P_2, \underline{P_1} \rangle$

i	$\#A_i$	BPI_i
1	4	4/6
2	1	1/6
3	1	1/6
∑	6	1

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 23

Nach Lloyd Shapley und Martin Shubik.

In 1954, Shapely and Shubik published what is generally regarded as the first game- theoretic article in the *American Political Science Review.*

⟨ *P*1 , *P*2, *P*3 ⟩
⟨ *P*1 , *P*3, *P*2 ⟩
⟨ *P*2 , *P*1, *P*3 ⟩
⟨ *P*2 , *P*1, *P*3 ⟩
⟨ *P*3 , *P*1, *P*2 ⟩
⟨ *P*3 , *P*2, *P*1 ⟩

UN-Sicherheitsrat mit SSPI

Preceding supporters	Preceding vote total (and votes needed)	Pivotal Player	Remai-ning players	Number of sequential coalitions
4 + 4	32 (7)	s	6 n	5×10C4×8!×6!
4 + 5	33 (6)	s	5 n	5×10C5×9!×5!
4 + 6	34 (5)	s	4 n	5×10C6×10!×4!
4 + 7	35 (4)	s	3 n	5×10C7×11!×3!
4 + 8	36 (3)	s	2 n	5×10C8×12!×2
4 + 9	37 (2)	s	1 n	5×10C9×13!
4 + 10	38 (1)	s	0	5×14!
5 + 3	38 (1)	n	6 n	5×9C3×8!×6!
				Total: 15!

http://www.milefoot.com/math/discrete/socialchoice/securitycouncilpower.htm

A|O|T (c) Dr.-Ing. Stefan Fricke 24

15! = 1307674368000 sequenzielle Koalitionen

With 15 players, there are 15!=1307674368000 sequential coalitions.

When the computation for the number of sequential coalitions contains four factors,

- the first factor is for the choice of the pivotal player,
- the second factor is for the partitioning of the non-permanent supporters,
- the third factor is for the arrangement of the preceding supporters,
- and the last factor is for the arrangement of the remaining players.

letzte Zeile: We see that a non-permanent member is a pivotal player in just 24,385,536,000 coalitions. Each non-permanent member is pivotal in one-tenth of those coalitions,

Therefore, each non-permanent member has 0.1865% of the power.

A permanent member will be the pivotal player in the other 1,283,288,832,000 coalitions. With five permanent members, each is pivotal in one-fifth of those coalitions

Therefore, each permanent member has 19.6270% of the power.

SSPI „ist ähnlich“ zu BPI

Ps ist ausschlaggebend in 2438553600 Koalitionen

$$SSPI(P_n) = \frac{24385536000}{1307674368000} = 0.1865\%$$

$$SSPI(P_s) = \frac{256657766400}{1307674368000} = 19.627\%$$

BPI (%)
1.65
16.69

http://www.milefoot.com/math/discrete/socialchoice/securitycouncilpower.htm

24385536000 / 10, da 10 ununterscheidbare Spieler in Ps.

1283288832000 / 5 = 256657766400 (da 5 ununterscheidbare Spieler in Pn).

Vergleiche BPI: Dieser Index errechnet eine deutlich stärkere Kraft der schwachen Spieler.

Soziale Entscheidungen: Wahlen

Was haben Wikimedia, Debian-Linux, MTV und die Piratenpartei gemeinsam?

Sie verwenden die Schulze-Methode

Referenzen

Markus Schulze: A New Monotonic and Clone-Independent Single-Winner Election Method, VOTING MATTERS, Issue 17, S. 9-19, October 2003. Online: http://www.citizensassembly.bc.ca/resources/submissions/csharman-10_0409201706-143.pdf,

Markus Schulze: A New Monotonic, Clone-Independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-Consistent Single-Winner Election Method, Working Paper Draft, September 2010. Online: http://home.versanet.de/~chris1-schulze/schulze1.pdf

[Schulze 2010] ist ein >50 Seiten Paper mit zahlreichen Beispielen.

http://commons.wikimedia.org/wiki/Schulze_method?uselang=de bringt zahlreiche Beispiele

http://demokratieblog.wordpress.com/2009/11/12/vorschlag-fur-eine-satzungsregelung-fur-paarweisen-vergleich-uberarbeitet erklärt den Begriff der „innersten Gruppe“.

Aufgabenblatt 4 – Wahlen

Abgabetermin: 14.12.2012

Aufgabe 1 – Schulze-Methode (5 Punkte)

Bei einer Wahl mit 5 Kandidaten ergeben sich die in der Tabelle rechts dargestellten Condorcet-Gewinner.
Führen Sie eine Schulze-Wahl durch, indem Sie

a) die Stärken der stärksten Pfade bestimmen und

b) daraus die Präferenzordnung herleiten.

	A	B	C	D	E
A			7	15	
B	5			21	
C		13			3
D			11		17
E	1	9			

Aufgabe 2 – Schulze-Methode (5 Punkte)

Die Tabelle rechts stellt die strikten Präferenzen d[x,y] zwischen allen Paaren von Kandidaten der Menge {A,B,C,D} dar. Z.B. 9 Wähler präferieren B vor A.

a) Ermitteln Sie alle potenziellen Sieger dieser nicht eindeutigen Wahl.
b) Ermitteln Sie alle möglichen Schulze-Rankings (Präferenzordnungen)

	A	B	C	D
A		10	10	10
B	9		15	10
C	4	2		10
D	12	5	9	

Aufgabe 3 –Weighted Voting Implementierung (10 Punkte)

Implementieren Sie Programme zur Berechnung des Banzhaf Power Index und des Shapley-Shubik Power Index.

Laden Sie ein ZIP-Archiv mit dem vollständigen Quellcode des Programms hoch. Die Implementierungssprache steht Ihnen frei; die Verwendung von Bibliotheken ist gestattet. Erstellen Sie ferner ein Dokument, das den Entwurf ihres Programms mit den wichtigsten Klassen/Datenstrukturen kurz beschreibt. Fügen Sie außerdem eine Readme-Datei mit Hinweisen zur Installation und zur Verwendung des Programms hinzu.

Aufgabe 4 – Machtverteilung im Weighted Voting (5 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Weighted Voting Game mit 4 Spielern, die 170 Stimmen repräsentieren und einer Quota von 100:

[100 : 70, 60, 30, 10]

Für die Lösung der Aufgabe dürfen Sie die in Aufgabe 3 entwickelten Programme nutzen. Als Abgabe verwenden Sie dann die Programmausgabe.

a) Berechnen Sie den Banzhaf Power Index.
b) Berechnen Sie den Shapley-Shubik Power Index.
c) Erklären / interpretieren Sie die Ergebnisse auf maximal einer halben Seite Text.

Abgabe der Lösung:
Durch Hochladen in das *Gruppenforum Aufgabenblatt 4* (https://www.isis.tu-berlin.de/mod/forum/view.php?id=299718). Bitte machen Sie die Lösung kenntlich, beispielsweise durch einen Namen mit einer Versionsnummer, ansonsten wird der offensichtlich letzte Beitrag / Upload als Lösung angenommen.

Das Forum ist bis zum Abgabetermin (23:55) geöffnet. Die Bewertung erfolgt online über die Offline-Aufgabe *Aufgabenblatt 4*.

Aufgabenblatt 4 – Wahlen

Abgabetermin: 14.12.2012

Aufgabe 1 – Schulze-Methode

Bei einer Wahl mit 5 Kandidaten ergeben sich die in der Tabelle rechts dargestellten Condorcet-Gewinner.
Führen Sie eine Schulze-Wahl durch, indem Sie

a) die Stärken der stärksten Pfade bestimmen und
b) daraus die Präferenzordnung herleiten

	A	B	C	D	E
A			7	15	
B	5			21	
C		13			3
D			11		17
E	1	9			

Pfad	Stärkster Pfad	Stärke
A->B	A->(15)->D->(11)->C->(13)->B	11
A->C	A->(15)->D->(11)->C	11
A->D	A->(15)->D	15
A->E	A->(15)->D->(17)->E	15
B->A	B->(5)->A	5
B->C	B->(21)->D->(11)->C	11
B->D	B->(21)->D	21
B->E	B->(21)->D->(17)->E	17
C->A	C->(13)->B->(5)->A	5
C->B	C->(13)->B	13
C->D	C->(13)->B->(21)->D	13
C->E	C->(13)->B->(21)->D->(17)->E	13
D->A	D->(11)->C->(13)->B->(5)->A	5
D->B	D->(11)->C->(13)->B	11
D->C	D->(11)->C	11
D->E	D->(17)->E	17
E->A	E->(9)->B->(5)->A	5
E->B	E->(9)->B	9
E->C	E->(9)->B->(21)->D->(11)->C	9
E->D	E->(9)->B->(21)->D	9

11 = p[A,B] > p[B,A] = 5	A > B
11 = p[A,C] > p[C,A] = 5	A > C
15 = p[A,D] > p[D,A] = 5	A > D
5 = p[E,A] < p[A,E] = 15	A > E
13 = p[C,B] > p[B,C] = 11	C > B
13 = p[C,D] > p[D,C] = 11	C > D
9 = p[E,C] < p[C,E] = 13	C > E
21 = p[B,D] > p[D,B] = 11	B > D
9 = p[E,B] < p[B,E] = 17	B > E
9 = p[E,D] < p[D,E] = 17	D > E
Ergebnis: A>C>B>D>E	

Aufgabe 2 – Schulze-Methode (5 Punkte)

Die Tabelle rechts stellt die strikten Präferenzen d[x,y] zwischen allen Paaren von Kandidaten der Menge {A,B,C,D} dar. Z.B. 9 Wähler präferieren B vor A.

a) Ermitteln Sie alle potenziellen Sieger dieser nicht eindeutigen Wahl.
b) Ermitteln Sie alle möglichen Schulze-Rankings (Präferenzordnungen)

	A	B	C	D
A		10	10	10
B	9		15	10
C	4	2		10
D	12	5	9	

Pfad	Stärkster Pfad	Stärke
A->B	A->(10)->B	10
A->C	A->(10)->C	10
A->D	A->(10)->D	10
B->A	B->(10)->D->(12)->A	10
B->C	B->(15)->C	15
B->D	B->(10)->D	10
C->A	C->(10)->(12)->A	10
C->B	C->(10)->D->(12)->A->(10)->B	10
C->D		10
D->A		12
D->B	D->(12)->A->(10)->B	10
D->C	D->(12)->A->(10)->C	10

12 = p[D,A] > p[A,D] = 10	D > A
15 = p[B,C] > p[C,B] = 10	B > C
10 = p[C,A] = p[A,C] = 10	C = A
10 = p[C,D] = p[D,C] = 10	C = D
10 = p[B,A] = p[A,B] = 10	B = A
10 = p[D,B] = p[B,D] = 10	D = B
Mögliche Schulze-Rankings:	
D > B > C > A	
D > B > A > C	
D > A > B > C	
B > D > A > C	
B > D > C > A	
B > C > D > A	

Aufgabe 3 –Weighted Voting Implementierung (10 Punkte)

Implementieren Sie Programme zur Berechnung des Banzhaf Power Index und des Shapley-Shubik Power Index.

- keine Musterlösung -

Aufgabe 4 – Machtverteilung im Weighted Voting (5 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Weighted Voting Game mit 4 Spielern, die 170 Stimmen repräsentieren und einer Quota von 100:

[100 : 70, 60, 30, 10]

a) Berechnen Sie den Banzhaf Power Index.
b) Berechnen Sie den Shapley-Shubik Power Index.
c) Erklären / interpretieren Sie die Ergebnisse.

Spieler	BPI	SSPI
1	5 / 12	5 / 12
2	3 / 12	3 / 12
3	3 / 12	3 / 12
4	1 / 12	1 / 12

BPI und SSPI liefern dieselben Ergebnisse.
Spieler 1 besitzt die größte Macht, gefolgt von 2 und 3 mit gleich großem Einfluss, obwohl 2 doppelt so viel Gewicht besitzt wie 3. Die Ursache liegt in der relativ hohen Quota (100/170, quasi 3/5-Mehrheit).
Zweierkoalitionen sind nur mit Spieler 1 möglich; 4 ist nur in der Dreierkoalition mit 2 und 3 kritischer Spieler, in der "großen" Koalition existiert kein kritischer Spieler.
Machtverteilung hängt nicht nur vom absoluten Stimmgewicht ab, sondern insbesondere auch von der Verteilung der Stimmen auf die übrigen Spieler.